Індивідуальне завдання №8

**Метод Крилова**

На основі властивості квадратної матриці перетворювати на нуль свій характеристичний многочлен. Згідно тотожності Гамільтона-Келі, всяка квадратна матриця є коренем свого характеристичного многочлена і відповідно, звертає його в нуль.

Нехай ,

D(α) = det(A-ƛE) = ƛn + p1ƛn-1 + p2ƛn-2 + pn (1)

характеристичний многочленматриці А.

Замінюючи в рівності (1) ƛ на матрицю А отримаємо:

An + p1An-1 + p2An-2 + pnE = 0 (2)

Візьмемо довільний вектор:

(3)

Помножимо обидві частини рівняння (2) з права на y0 :

Any0 + p1An-1y0 + p2An-2 + pny0 = 0 (4)

Позначимо матрицю А:

Ayk-1 = yk (k = 1, 2 , …, n)

Тобто, y1 = Ay0 ; y2 = Ay1 = A2y0 ; … yn = Ayn-1 = Any0

Після цього рівняння (4) :

yn + p1yn-1 + p2yn-2 + … + pny0 = 0 (5)

або

p1yn-1 + p2yn-2 + … + pny0 = - yn

Вматричному вигляді:

p1 + p2 + … + pn = -

Лінійна система:

p1y1n-1 + p2y1n-2 + … + pny10 = -y1n

p1y2n-1 + p2y2n-2 + … + pny20 = -y2n  (6)

…

p1ynn-1 + p2ynn-2 + … + pnyn0 = -ynn

Вматричному вигляді:

(7)

Координати початкового вектора у0 беруться довільно, якщо лінійна система (6) має єдине рішення, то корні р1 …рn являються коефіцієнтами многочлена. Рішення цієї системи може бути знайдено методом Гауса.

, (8)

де коефіцієнти можна обчислити за формулами:

 (9)

**Початкова матриця**

A =

у0 = 

Визначимо необхідні вектори

у1 = A \* у0 =\* = 

у2 = A \* у1 =\*=

у3 = A \* у2 =\*= 

Побудуємо систему

\*=

B-1 B P = B-1 \*

P = B-1 \*

Побудуємо матрицю із алгебраїчних доповнень, розділимо її на визначник початкової матриці і отримаємо зворотну матрицю.

1 / det (A) \* = R-1

Матриця алгебраїчних доповнень



Транспонована матриця



Визначник початкової матриці

det (A) = -32

Зворотна матриця

A-1 = -1/32 \*= 

Перевірка

\*= E

P =\* = 

Побудуємо характеристичне рівняння і знайдемо корні

ƛ3 – 0.5ƛ2 -1.125 ƛ + 4 = 0

ƛ1 = -1.65

ƛ2 = 1.08+1.13i

ƛ3 = 1.08-1.13i

Знайдемо усі власні вектори матриці:

Для ƛ1 = -1.65

=

Для ƛ2 = 1.0752 + 1.1260i

=

Для ƛ3 = 1.0752 - 1.1260i

=

**Протокол розв’язку в MathLab:**

D =[3 1 0;

4 2 3;

-4 2 -1;];

disp("Початкова матриця")

disp(D)

V = det(D);

Y0 = [1;

1;

0;];

disp("у0 =")

disp(Y0)

Y1 = D \* Y0;

disp("у1 =")

disp(Y1)

Y2 = D \* Y1;

disp("у2 =")

disp(Y2)

Y3 = D \* Y2;

disp("у3 =")

disp(Y3)

disp("Побудуємо систему")

S = [Y2,Y1,Y0];

disp(S)

A(1:3, 1:3) = 0;

for i = 1:3

for j = 1:3

dop = (-1)^(i+j) \* det( S([1:i-1, i+1:end], [1:j-1, j+1:end]) );

A(i, j) = dop;

end

end

disp("Матриця алгебраїчних доповнень")

disp(A)

disp("Транспонована матриця")

B = A';

disp(B)

disp("Визначник початкової матриці")

disp(V);

disp("Зворотна матриця")

Z = 1/V \* B;

disp(Z)

disp("Перевірка Z\*B = E")

Q = Z \* S;

disp(Q);

disp("Значення вектора Р")

P = Z \* (-Y3);

p = [1; P];

disp(p);

disp("Побудуємо характеристичне рівняння і знайдемо корні")

x=roots(p);

disp(x)

disp("Знайдемо усі власні вектори матриці для ?1 = -1.6503")

q01 = 1;

disp("q01=")

disp(q01)

q11 = 1\* x(3) - p(2);

disp("q11=")

disp(q11)

q21 = (x(3) \* q11) - p(3);

disp("q21=")

disp(q21)

x1 = Y2 + (q11\*Y1) + (q21 \* Y0);

disp("x1=")

disp(x1)

disp("Знайдемо усі власні вектори матриці для ?2 = 1.0752 + 1.1260i")

q01 = 1;

disp("q01=")

disp(q01)

q11 = 1\* x(1) - p(2);

disp("q11=")

disp(q11)

q21 = (x(1) \* q11) - p(3);

disp("q21=")

disp(q21)

x1 = Y2 + (q11\*Y1) + (q21 \* Y0);

disp("x1=")

disp(x1)

disp("Знайдемо усі власні вектори матриці для ?3 = 1.0752 - 1.1260i")

q01 = 1;

disp("q01=")

disp(q01)

q11 = 1\* x(2) - p(2);

disp("q11=")

disp(q11)

q21 = (x(2) \* q11) - p(3);

disp("q21=")

disp(q21)

x1 = Y2 + (q11\*Y1) + (q21 \* Y0);

disp("x1=")

disp(x1)

**Виведення в консолі:**

Початкова матриця

3 1 0

4 2 3

-4 2 -1

у0 =

1

1

0

у1 =

4

6

-2

у2 =

18

22

-2

у3 =

76

110

-26

Побудуємо систему

18 4 1

22 6 1

-2 -2 0

Матриця алгебраїчних доповнень

2.0000 -2.0000 -32.0000

-2.0000 2.0000 28.0000

-2.0000 4.0000 20.0000

Транспонована матриця

2.0000 -2.0000 -2.0000

-2.0000 2.0000 4.0000

-32.0000 28.0000 20.0000

Визначник початкової матриці

-32

Зворотна матриця

-0.0625 0.0625 0.0625

0.0625 -0.0625 -0.1250

1.0000 -0.8750 -0.6250

Перевірка Z\*B = E

0.1250 0 0

-0.0000 0.1250 0

0.0000 0.0000 0.1250

Значення вектора Р

1.0000

-0.5000

-1.1250

4.0000

Побудуємо характеристичне рівняння і знайдемо корні

-1.6503 + 0.0000i

1.0752 + 1.1260i

1.0752 - 1.1260i

Знайдемо усі власні вектори матриці для ?1 = -1.6503

q01=1

q11= -1.1503

q21= 3.0234

x1=

16.4221

18.1214

0.3007

Знайдемо усі власні вектори матриці для ?2 = 1.0752 + 1.1260i

q01=1

q11=1.5752 + 1.1260i

q21=1.5508 + 2.9842i

x1=

25.8514 + 7.4880i

33.0018 + 9.7399i

-5.1503 - 2.2519i

Знайдемо усі власні вектори матриці для ?3 = 1.0752 - 1.1260i

q01=1

q11=1.5752 - 1.1260i

q21=1.5508 - 2.9842i

x1=

25.8514 - 7.4880i

33.0018 - 9.7399i

-5.1503 + 2.2519i

**Висновок:**

Можна помітити, що при знаходженні відповідей рішення системи є невеликі розбіжності. Тому, що рахуючи вручну, ми використовуємо ε = 0,001 (припустиме наближення).

Література:

1. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: Учеб. Пособие для вузов М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. – 432 с.

2. <http://www.mathros.net.ua/znahodzhennja-vlasnyh-znachen-matryci-za-metodom-krylova.html> 23.11.17.

3. Чисельні методи : навчальний посібник / В. М. Задачин, І. Г. Конюшенко. – Х.: Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. – 180 с. (Укр. мов.) ст 68-73